NO.

Date 8/05/2018

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ $n \times n$ ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+m}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ είναι ιδιοτιμές με πολλαπλότητα 1 και λ_{k+i} έχουν πολλαπλότητα r_i, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.
Τότε ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & J_m \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \lambda_k \end{pmatrix}_{k \times k}$$

και

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_{k+j} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+j} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_{k+j} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_{k+j} \cdot I + Z_j \quad \text{όπου} \quad Z_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου J_j έχει διάσταση $r_j \times r_j$ και $k + r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$.

▶ Εάν οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές ανά δύο τότε ο πίνακας J θα είναι

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Εάν ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές θα είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

▶ Εάν A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας K και διαγώνιος πίνακας B τέτοιοι ώστε

$$A = K \cdot B \cdot K^{-1}$$

Σε αυτή την περίπτωση επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$A^{\omega} = K \cdot B^{\omega} \cdot K^{-1}.$$

Ο τύπος αυτός είναι εύκολος για τον A^{ω}, εάν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του A διότι τότε

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

NO. 4

Date

και $B^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_k^m \end{pmatrix}$

▶ Εάν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα A τότε

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

οπότε εάν $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ το ομογενές σύστημα

$$(\lambda I - A)u = 0$$

έχει ορίζουσα $|\lambda I - A| = 0$

οπότε έχει και μη μηδενική λύση.

Συνεπώς, υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα u τέτοιο ώστε

$$(\lambda I - A)\cdot u = 0 \quad \text{ή} \quad Au = \lambda u$$

Κάθε τέτοιο μη μηδενικό διάνυσμα λέγεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Εάν u είναι τέτοιο διάνυσμα τότε και $\kappa \cdot u$ με $\kappa \neq 0$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα A καθώς και κάποιο ιδιοδιάνυσμα για κάθε μια απ' αυτές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-3) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 10 = 9 > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

• Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη $\lambda=5$, αναζητώ $u=(u_1,u_2)$ τέτοιο ώστε $Au=5\cdot u$

(ή) $\begin{pmatrix} 4u_1+2u_2 \\ u_1+3u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_1 \\ 5u_2 \end{pmatrix}$

Επιλύοντας, βρίσκουμε

$u_1 = 2u_2$.

Εάν θέσουμε $u_2=1$ τότε $u_1=2$ και το $u=(2,1)^T$

• Την ίδια δουλειά κάνουμε και για $\lambda=2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω λ μια ιδιοτιμή του $n\times n$ πίνακα A, και $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$ είναι οι συμπαράγοντες των στοιχείων της i γραμμής του πίνακα $B = A-\lambda I = (b_{ij})$ τότε το διάνυσμα $(B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in})^T$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρούμε ότι $i=1$

Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $u=(B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n})^T$ τότε $Au=\lambda u$

Γνωρίζουμε ότι αν

$$B=A-\lambda I = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

και $\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}$ τότε $B\cdot \operatorname{adj} B = |B|\cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Ισχύει διότι $|B|=|A-\lambda I|$ δηλαδή είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο το οποίο είναι μηδέν.

δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + \dots + b_{1n}B_{1n} = 0 \quad \leftarrow 1^{η} \text{ γραμμή} \times 1^{η} \text{ στήλη}$$

$$b_{21}B_{11} + b_{22}B_{12} + \dots + b_{2n}B_{1n} = 0 \quad \leftarrow 2^{η} \text{ γραμμή} \times 1^{η} \text{ στήλη}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$b_{n1}B_{11} + b_{n2}B_{12} + \dots + b_{nn}B_{1n} = 0 \quad \leftarrow n^{η} \text{ γραμμή} \times 1^{η} \text{ στήλη}$$

Δηλαδή,

$$B \cdot u = 0.$$

Δηλαδή: $(A - \lambda I)u = 0 \Rightarrow Au = \lambda u$

Άρα, u ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

καθώς επίσης και κάποιο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από αυτές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Οι ιδιοτιμές λ ικανοποιούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$0 = p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2)$$

άρα οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

• **Για $\lambda = 1$:**

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε, αν

$$u_1 = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)^T = (2, -1, 1)^T$$

είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\lambda=1$.

- **Όμοια για $\lambda=2$:**

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad v_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,0,1)$$

- **Όμοια για $\lambda=3$:** Σπίτι

(Norm) Στάθμη Πινάκων:

Ο χώρος των $n \times n$ πινάκων εφοδιασμένος με την πράξη της πρόσθεσης

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$\lambda A=(\lambda a_{ij}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης (διάσταση του είναι n^2)

- Ορίζω στον χώρο αυτό τις εξής στάθμες:

(1) $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$

(2) $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$, στάθμη 2

(3) $\|A\| = \max_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} |a_{ij}|$

(4) $\|A\| = \sup_{C \neq 0} \dfrac{|AC|}{|C|}$

(5) $\|A\| = \sup_{|C|=1} |AC|$

NO

Date

▶ Επίσης ο χώρος των $n \times n$ πινάκων είναι πεπερασμένης διάστασης. Όλες οι στάθμες είναι ισοδύναμες

<u>(Πχ)</u> για τη $\|\cdot\|_2$

Αποδεικνύεται ότι

$$\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$$

(για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij})^2}$)

▶ Επίσης, $\|\lambda A\|_2 = |\lambda|\,\|A\|_2$.

▶ Επιπλέον, εάν $A=(a_{ij})$ $n \times n$ και $c_k := (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ και $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα x.

Έχουμε τα εξής:

$$|Ax| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} \right| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left[\langle c_1, x \rangle^2 + \langle c_2, x \rangle^2 + \dots + \langle c_n, x \rangle^2 \right]^{1/2} =$$

$$\leq \left(|c_1|^2 \cdot |x|^2 + |c_2|^2 \cdot |x|^2 + \dots + |c_n|^2 \cdot |x|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= |x| \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \right)^{1/2} = |x| \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \|A\|_2 \cdot |x|$$

Άρα, $|Ax| \leq \|A\|_2 \cdot |x|$

▶ Θα λέμε ότι <u>η ακολουθία πινάκων (A_ν) συγκλίνει</u> σε ένα πίνακα A εάν $\lim_\nu \|A_\nu - A\| = 0$.

▶ Η νόρμα $\|\cdot\|_2$ κάνει τον χώρο των $n \times n$ πινάκων πλήρη.

Πράγματι, έστω (A_ν) μια ακολουθία πινάκων που είναι ακολουθία Cauchy

δηλαδή $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \|A_\nu - A_\mu\|_2 < \varepsilon, \ \forall \nu,\mu \geq n_0$

οπότε,

$$|a_{ij}^{\nu} - a_{ij}^{\mu}| \leq \|A_\nu - A_\mu\|_2 < \varepsilon \quad \forall \nu,\mu \geq n_0 \quad \forall i,j$$

Επομένως, η (a_{ij}^{ν}) είναι ακολουθία Cauchy άρα είναι συγκλίνουσα

$$a_{ij}^{\nu} \to b_{ij}$$

τότε αν

$$B = (b_{ij})$$

ισχύει

$$\|A_\nu - B\|_2 \to 0.$$

▶ Παρόμοια με τις σειρές πραγματικών αριθμών μια σειρά $n \times n$ πινάκων θα λέμε ότι συγκλίνει σε έναν πίνακα A όταν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$S_k = A_1 + A_2 + \dots + A_k$$

συγκλίνει προς τον πίνακα A.

▶ Έστω η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

τότε $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$

NO.

Date

αποδεικνύεται ότι η σειρά αυτή συγκλίνει, σε έναν πίνακα

ορίζω

$$\lim_{n} S_n = \exp A = e^A$$

$\uparrow$ συμβολισμός

Δηλαδή,

$$e^A = I + A + A^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

▶ Για οποιονδήποτε πίνακα A για τον πίνακα e^A ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) $\det e^A \neq 0$

(2) $e^0 = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O^n}{n!} = I$

(3) Εάν A, B πίνακες και $AB = BA$
(δηλαδή αντιμετατίθενται) ισχύει ότι $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

(4) Επίσης A και $-A$ αντιμετατίθενται

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$$

$$e^{-A} \cdot e^A = e^{-A+A} = e^0 = I$$

Άρα, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

▶ Μπορούμε, επίσης να ορίσουμε εκθετική συνάρτηση ενός πίνακα ως εξής:

$x(t) = \exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$

όπου $\exp(tA) = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 \cdot A^2}{2!} + \dots + \frac{t^\nu \cdot A^\nu}{\nu!}, \dots$

τότε

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A + \frac{tA^2}{1!} + \dots + \frac{t^{n-1} \cdot A^n}{(n-1)!} + \dots$$

Άρα,

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \cdot \exp(tA)$$

▶ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ συγκλίνει

αποδεικνύεται με τη βοήθεια της εξής ιδιότητας

Θεωρώντας $\|A\|_1 = \max_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |a_{ij}| = \mu$. τότε εάν πούμε ότι

$A^\nu = (a_{ij}(\nu))$

αποδεικνύεται ότι ισχύει η εξής σχέση

$$|a_{ij}(\nu)| \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{διάσταση} \\ \text{του πίνακα}}}{n^{\nu-1}} \cdot \mu^\nu \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

Επαγωγικά

Πράγματι, η σχέση ισχύει για $\nu=1$ έχουμε

$$|a_{ij}(1)| = |a_{ij}| \le n^0 \, |a_{ij}| \le n^0 \cdot \mu^1 = 1\cdot\mu.$$

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση ισχύει για κάποιο $\nu\in\{1,2,\dots\}$